

# Neurčitý integrál

## 1. Primitívna funkcia a neurčitý integrál

*Definícia:*

Funkciu  $F$  nazývame **primitívnou funkciou** k funkcii  $f$  na  $(a, b)$ , ak pre každé  $x \in (a, b)$  je  $F'(x) = f(x)$ .

**Veta 1:** Ak  $F$  je primitívna funkcia k funkcii  $f$  na  $(a, b)$ , potom  $F+c$ , kde  $c$  je ľubovoľná konštanta, je primitívna funkcia k funkcii  $f$  na  $(a, b)$ .

*Definícia:* Nech  $F$  je primitívna funkcia k funkcii  $f$  na  $(a, b)$  a  $c \in \mathbb{R}$ . Množinu všetkých primitívnych funkcií  $F+c$  nazývame **neurčitým integrálom** funkcie  $f$  na  $(a, b)$  a označujeme

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

## 2. Základné vzorce integrovania

**Veta 2:** Ak existujú na  $(a, b)$  neurčité integrály funkcií  $f_1, f_2, \dots, f_n$  a ak  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sú konštanty, potom existuje neurčitý integrál funkcie  $c_1f_1 + c_2f_2 + \dots + c_nf_n$  na  $(a, b)$  a platí:

$$\int [c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \dots + c_nf_n(x)]dx = c_1 \int f_1(x)dx + \dots + c_n \int f_n(x)dx$$

Túto metódu integrovania nazývame *integrovanie metódou rozkladu*.

## 3. Integrovanie metódou substitúcie

**Veta 3:** Nech  $F$  je primitívna funkcia k funkcii  $f$  na  $(\alpha, \beta)$ . Nech funkcia  $\varphi(x)$  má na  $(a, b)$  deriváciu  $\varphi'(x)$  a nech pre  $\forall x \in (a, b)$  je  $\varphi(x) \in (\alpha, \beta)$ .

Potom *zložená funkcia*  $F[\varphi(x)]$  je primitívna k funkcii  $f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$  na  $(a, b)$  a platí

$$\int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)dx = \int f(t)dt, \text{ pre } t = \varphi(x).$$

## 4. Integrovanie metódou per partes

**Veta 4:** Nech  $f$  a  $g$  sú funkcie definované na  $(a, b)$  a nech v každom bode intervalu  $(a, b)$  majú  $f'(x), g'(x)$ .

Potom

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$$

alebo

$$\int f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)dx$$

ak jedna z funkcií  $f'g, fg'$  je integrovateľná.

## 5. Integrovanie racionálnych funkcií

### 5 A. Reálne navzájom rôzne korene polynómu $Q(x)$ .

Nech polynóm  $Q(x)$  má korene  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ . Potom ho môžeme zapísať ako súčin koreňových činiteľov

$$Q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_m).$$

Dá sa dokázať, že platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} + \dots + \frac{A_m}{x - \alpha_m}, \text{ pričom } A_1, \dots, A_m \text{ sú konštanty}$$

Úprave rozkladu funkcie  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  hovoríme *rozklad na parciálne zlomky*.

## 5 B. Reálne násobené korene polynómu $Q(x)$

Nech polynóm  $Q(x)$  má jeden reálny  $m$ -násobný koreň.

$$Q(x) = (x - \alpha)^m.$$

Dá sa dokázať, že platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \frac{A_3}{(x - \alpha)^3} + \dots + \frac{A_m}{(x - \alpha)^m}, A_1, A_2, \dots, A_m \text{ sú konštanty}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = A_1 \int \frac{dx}{x - \alpha} + A_2 \int \frac{dx}{(x - \alpha)^2} + \dots + A_m \int \frac{dx}{(x - \alpha)^m} \quad A_1 \int \frac{dx}{x - \alpha} = A_1 \ln|x - \alpha|$$

$$\int \frac{dx}{(x - \alpha)^i} = \int (x - \alpha)^{-i} dx = \frac{(x - \alpha)^{-i+1}}{-i+1} = \frac{1}{(1-i)(x - \alpha)^{i-1}}$$

$$\int \frac{(x+2)^2}{x(x-1)^2} dx = 4 \ln|x| - 3 \ln|x-1| - \frac{9}{x-1} + c$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \quad \Big/ x(x-1)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

$$x = 0 : 4 = A$$

$$x = 1 : 9 = C$$

$$2x + 4 = 2A(x-1) + B(x-1) + Bx + C$$

$$x = 1 : 6 = B + C \Rightarrow B = -3$$

**Pr:**

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^3 + x^2} dx = x + \int \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)} dx = x - \ln|x| + \frac{1}{x} + 2 \ln|x-1| + c$$

$$\frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \quad \Big/ x^2(x-1)$$

$$x^2 + 1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2$$

$$x = 0 : 1 = -B \Rightarrow B = -1$$

$$x = 1 : 2 = C$$

$$2x = A(x-1) + Ax + B + 2Cx$$

$$x = 0 : 0 = -A + B \Rightarrow A = -1$$

□

### 5 C. Komplexné združené korene – násobné.

Nech polynóm  $Q(x)$  má korene  $r$  - násobné, pričom predpokladáme, že:

$$r = \frac{m}{2}$$

Potom je známe, že:

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^r, p, q \in R$$

Dá sa dokázať, že platí:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{A_r x + B_r}{(x^2 + px + q)^r}.$$

Vynásobíme rovnicu výrazom  $(x^2 + px + q)^r$  a dostaneme  $P(x) = (A_1x + B_1)(x^2 + px + q)^{r-1} + \dots + (A_r x + B_r)$ . Pravú stranu rovnosti upravíme umocňovaním, roznásobovaním a úpravou podľa klesajúcej mocniny  $x$ . Potom dostaneme rovnosť dvoch polynómov. Porovnávaním koeficientov pri rovnakých mocninách premennej  $x$  dostaneme sústavu rovníc, z ktorých vypočítame hodnoty konštánt:

$$A_1, A_2, \dots, A_r; B_1, B_2, \dots, B_r$$

Potom

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A_1x + B_1}{x^2 + px + q} dx + \int \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} dx + \dots + \int \frac{A_r x + B_r}{(x^2 + px + q)^r} dx$$

Integrál

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

vieme vypočítať, ak vypočítame nasledujúce dva typy integrálov:

$$I_1 = \int \frac{A_1x + B_1}{x^2 + px + q} dx$$

$$I_2 = \int \frac{A_r x + B_r}{(x^2 + px + q)^r} dx; r = 2, 3, \dots, \frac{m}{2}$$

$$I_1 : \int \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} dx = C_1 \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + D_1 \int \frac{dx}{x^2 + px + q}$$

Konštanty  $C_1, D_1$  vypočítame z rovnosti  $A_1 x + B_1 = C_1(2x + p) + D_1$ , ktorú dostaneme deriváciou rovnice a vynásobením výrazu  $x^2 + px + q$ .

Potom:

$$X^1 : A_1 = 2C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{A_1}{2}$$

$$X^0 : B_1 = C_1 p + D_1 \Rightarrow B_1 = \frac{A_1 p}{2} + D_1 \Rightarrow D_1 = B_1 - \frac{A_1 p}{2}$$

Po dosadení do  $I_1$  dostávame:

$$\begin{aligned} \int \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} dx &= \frac{A_1}{2} \ln|x^2 + px + q| + \left( B_1 - \frac{A_1 p}{2} \right) \int \frac{dx}{\left( x + \frac{p}{2} \right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \\ &= \left| \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} \right| = \frac{A_1}{2} \ln|x^2 + px + q| + \frac{\frac{2B_1 - A_1 p}{2}}{\sqrt{\frac{4q - p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{\frac{2x + p}{2}}{\sqrt{\frac{4q - p^2}{4}}} = \\ &= \frac{A_1}{2} \ln|x^2 + px + q| + \frac{2B_1 - A_1 p}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + c \end{aligned}$$

$$I_2 : \int \frac{A_r x + B_r}{(x^2 + px + q)^r} dx = C_r \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^r} dx + D_r \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^r}$$

Po zderivovaní rovnice a vynásobení výrazom  $(x^2 + px + q)^r$  dostávame:

$A_r x + B_r = C_r(2x + p) + D_r$ . Rovnako, ako v predchádzajúcom prípade, vypočítame:

$$C_r = \frac{A_r}{2}; D_r = B_r - \frac{A_r p}{2}$$

Po dosadení do  $I_2$  dostávame:

$$\int \frac{A_r x + B_r}{(x^2 + px + q)^r} dx = \frac{A_r}{2} \int \frac{dz}{z^r} + \left( B_r - \frac{A_r p}{2} \right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^r} =$$

$$\begin{aligned} \text{kde } z = x^2 + px + q & \quad \left| x + \frac{p}{2} = t \right|; a^2 = q - \frac{p^2}{4} \\ dz = (2x + p)dx & \quad \left| dx = dt \right| \end{aligned}$$

Zostalo nám ukázať ako sa rieši integrál

$$= \frac{A_r}{2(1-r)z^{r-1}} + \left( B_r - \frac{A_r p}{2} \right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^r};$$

$$\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^r}$$

Odvodíme rekurentný vzorec, podľa ktorého sa ľahko nájde riešenie hľadaného integrálu.

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 + a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} - \frac{1}{a^2} \int x \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} =$$

$$= \left| \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \rightarrow -\frac{1}{2n(x^2 + a^2)^n} \right| = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{x}{2a^2 n(x^2 + a^2)} - \frac{1}{2a^2 n} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} =$$

$$= \frac{2n-1}{2a^2 n} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{x}{2a^2 n(x^2 + a^2)}$$

Rekurentná formula:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{x}{2na^2(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

Poznámka: K výpočtu integrálu

$$\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}$$

stačí položiť  $x=t$  a  $n+1=r$  a použiť

rekurentnú formulu.

**Pr.:**

$$\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)} = \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{x^2 + 1} = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + c$$

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \Big/ x(x^2 + 1)$$

$$1 = A(x^2 + 1) + Bx^2 + Cx$$

$$x = 0 : 1 = A$$

$$x = i : 1 = -B + Ci \Rightarrow B = -1; C = 0$$

□

**Pr.**

$$\int \frac{dx}{1+x^3} = \int \frac{dx}{(1+x)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3} \ln|1+x| - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} = \otimes$$

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \Big/ (x+1)(x^2-x+1)$$

$$1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$$

$$x = -1 : 1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$x^2 : 0 = A + B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$$

$$x^0 : 1 = A + C \Rightarrow C = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x-2}{x^2-x+1} = D \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{E}{x^2-x+1} \Big/ x^2-x+1$$

$$x-2 = (2x-1)D + E$$

$$x : 1 = 2D \Rightarrow D = \frac{1}{2}$$

$$x^0 : -2 = -D + E \Rightarrow E = -\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \otimes &= \frac{1}{3} \ln|1+x| - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{1}{3} \ln|1+x| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \\ &= \frac{1}{3} \ln|1+x| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c; \end{aligned}$$

□

Pr:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2+1}{(x+1)(x^2+1)^2} dx &= \oplus \\ \frac{3x^2+1}{(x+1)(x^2+1)^2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} \quad \Big/ \quad (x+1)(x^2+1)^2 \\ 3x^2+1 &= A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)(x^2+1) + (Dx+E)(x+1) \\ x = -1: 4 &= 4A \Rightarrow A = 1 \\ x = i: -2 &= -D + Di + Ei + E \end{aligned}$$

□

## 6. Integrovanie racionálnych funkcií.

### 6A. Lineárna iracionalita.

Integrály typu

$$\int R(x, \sqrt[k_1]{ax+b}, \dots, \sqrt[k_n]{ax+b}) dx$$

môžeme pomocou substitúcie  $ax+b=t^k$ 

$$-2 = -D + E$$

$$0 = D + E$$

$$-2 = 2E \Rightarrow E = -1 \Rightarrow D = 1$$

$$x^4: 0 = A + B \Rightarrow B = -1$$

$$x^0: 1 = A + C + E \Rightarrow C = -E \Rightarrow C = 1$$

$$\begin{aligned} \oplus &= \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{x-1}{x^2+1} dx + \int \frac{x-1}{(x^2+1)^2} dx = \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \\ &= \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c. \end{aligned}$$

( $k$  je najmenší spoločný násobok čísel  $k_1, k_2, \dots, k_n$ ) upraviť na integrál z racionálnej funkcie.

$$= -6 \int \frac{t^9 - t^3}{t-1} dt = -6 \int (t^8 + t^7 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3) dt =$$

**Pr:**

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}} &= \left| x+1 = t^6; dx = 6t^5 dt \right| = 6 \int \frac{(t^6 - 1)t^5}{t^2 - t^3} dt = -6 \int \frac{(t^6 - 1)t^5}{t^2(t-1)} dt = \\ &= -\frac{6t^9}{9} - \frac{6t^8}{8} - \frac{6t^7}{7} - \frac{6t^6}{6} - \frac{6t^5}{5} - \frac{6t^4}{4} = -\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4} - \frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7} - (x+1) - \frac{6}{5}\sqrt[5]{(x+1)^5} - \\ &\quad - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} + c \end{aligned}$$

Integrály typu  
môžeme upraviť na integrál z racionálnej funkcie substitúciou, kde  $k$  je najmenší spoločný

$$\int \mathbb{R} \left( x, \sqrt[k_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[k_n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx$$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$$

násobok čísel  $k_1, k_2, \dots, k_n$ .

□

**Pr:**

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{dx}{x} &= \left| \frac{1+x}{1-x} = t^2; 1+x = t^2 - t^2x; x(1+t^2) = t^2 - 1; x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}; dx = \frac{4t dt}{(1+t^2)^2} \right| = \\ &= 4 \int \frac{t^2(1+t^2)}{(1+t^2)^2(t^2-1)} dt = 4 \int \frac{t^2 dt}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} = \int \frac{A}{t-1} dt + \int \frac{B}{t+1} dt + \int \frac{Ct+D}{t^2+1} dt = \\ &= A \ln|t-1| + B \ln|t+1| + \frac{C}{2} \ln|t^2+1| + D \operatorname{arctg} t = \\ &= A \ln \left| \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1 \right| + B \ln \left| \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + 1 \right| + \frac{C}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} + 1 \right| + D \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. \end{aligned}$$

□

## 6B. Kvadratická iracionalita typu

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Upravíme kvadratický polynóm  $ax^2 + bx + c$  na úplný štvorec a vhodnou substitúciou dostaneme jeden zo vzorcov:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right|$$

**Pr:**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 2x + x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2 + 4}} = |x-1 = t; dx = dt| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 4}} = \ln \left| x-1 + \sqrt{x^2 - 2x + 5} \right|$$

**Pr:**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 8x + 13}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + \frac{13}{4}}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2 + \frac{3}{4}}} = \frac{1}{2} \ln \left| x-1 + \sqrt{x^2 - 2x + \frac{13}{4}} \right|$$

**Pr:**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-[(x+1)^2 - 1 - 3]}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x+1)^2}} = \arcsin \frac{x+1}{2} + c$$

$$\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

## 6C. Kvadratická iracionalita typu

$P_n(x)$  je polynóm  $n$  – tého stupňa.

Na výpočet tohoto typu integrálu používame tzv. Ostrogradského vzorec:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + K \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

kde  $Q_{n-1}(K)$  je polynóm  $(n-1)$  – tého stupňa a  $K$  je konštanta. Koefficienty polynómu  $Q_{n-1}(x)$  a konštantu  $K$  určíme tak, že rovnosť zderivujeme a vynásobíme výrazom:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

Dostaneme:

Ďalej postupujeme tak, že porovnáme koeficienty pri rovnakých mocninách  $x$  na oboch stranách rovnosti. Zo vzniknutej sústavy lineárnych rovníc vypočítame koeficienty polynómu

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{Q(x)(2ax + b)}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \frac{K}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad \Big/ \quad \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

$$P(x) = Q(x)(ax^2 + bx + c) + Q(x) \left( ax + \frac{b}{2} \right) + K$$

$Q_{n-1}(x)$  a konštantu  $K$ .

**Pr:**

$$\int \frac{3x^3}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx = (Ax^2 + Bx + C)\sqrt{x^2+4x+5} + k \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$$

$$\frac{3x^3}{\sqrt{x^2+4x+5}} = (2Ax + B)\sqrt{x^2+4x+5} + \frac{(Ax^2 + Bx + C)2(x+2)}{2\sqrt{x^2+4x+5}} + \frac{k}{\sqrt{x^2+4x+5}} \Big/ \sqrt{\quad}$$

$$3x^3 = 2Ax^3 + 8Ax^2 + 10Ax + Bx^2 + 4Bx + 5B + Ax^3 + 2Ax^2 + Bx^2 + 2Bx + Cx + 2C + k$$

$$x^3 : 3 = 3A \Rightarrow A = 1$$

$$x^2 : 0 = 10A + 2B \Rightarrow B = -5$$

$$x : 0 = 10A + 6B + C \Rightarrow C = 20$$

$$x^0 : 0 = 5B + 2C + k \Rightarrow k = -15$$

$$\int \frac{3x^3}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx = (x^2 - 5x + 20)\sqrt{x^2+4x+5} - 15 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}} =$$

$$(x^2 - 5x + 20)\sqrt{x^2+4x+5} - 15 \ln|x+2 + \sqrt{x^2+4x+5}| + c$$

□

**Pr:**

$$\int \sqrt{x^2 - 2x - 1} dx = \int \frac{x^2 - 2x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}} dx = (Ax + B)\sqrt{x^2 - 2x - 1} + k \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$$

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}} = A\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \frac{(Ax + B)2(x-1)}{2\sqrt{x^2 - 2x - 1}} + \frac{k}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}} \Big/ \sqrt{\quad}$$

$$x^2 - 2x - 1 = A(x^2 - 2x - 1) + Ax^2 - Ax + Bx - B + k$$

$$x^2 : 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$x : -2 = -3A + B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$x^0 : -1 = -A - B + k \Rightarrow k = -1$$

$$\int \sqrt{x^2 - 2x - 1} dx = \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2 - 2} = \frac{x-1}{2}\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \ln|x-1 + \sqrt{x^2 - 2x - 1}| + c$$

Pomocou Ostrogradského vzorca si môžeme odvodiť dve rekurentné formuly:

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c$$

Dôkaz k druhému vzorcu:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = (Ax + B)\sqrt{a^2 - x^2} + k \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = A\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{(Ax + B)2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{k}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$a^2 - x^2 = Aa^2 - Ax^2 - Ax^2 - Bx + k$$

$$x^2 : -1 = -2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$x : 0 = -B \Rightarrow B = 0$$

$$x^0 : a^2 = Aa^2 + k \Rightarrow k = \frac{a^2}{2}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c$$

□

**Pr:**

$$\int \sqrt{x^2 - 2x - 1} dx = \int \sqrt{(x-1)^2 - 2} dx = \frac{x-1}{2} \sqrt{(x-1)^2 - 2} - \ln|x-1 + \sqrt{x^2 - 2x - 1}| + c$$


---

**Pr:**

$$\int \sqrt{1 - 4 - x^2} dx = \int \sqrt{-[(x+2)^2 - 4 - 1]} dx = \int \sqrt{5 - (x+2)^2} dx = \frac{x+2}{2} \sqrt{5 - (x+2)^2} + \frac{5}{2} \arcsin \frac{x+2}{\sqrt{5}} + c$$


---

### 6D. Kvadratická iracionalita typu

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}; n \in \mathbb{N}, \alpha \text{ nie je koreňom polynómu } ax^2 + bx + c. \text{ Integrál riešime}$$

$$\text{substitúciou } t = \frac{1}{x-\alpha} \text{ resp : } x - \alpha = \frac{1}{t}.$$

**Pr.:**

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}} &= \left| x-1 = \frac{1}{t}; dx = -\frac{1}{t^2} dt \right| = \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \sqrt{\left(\frac{1}{t}+1\right)^2 + \frac{1}{t} + 1 + 1}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \sqrt{\frac{1+2t+t^2+t+2t^2}{t^2}}} = \\ &= \int \frac{-dt}{\sqrt{3t^2+3t+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+\frac{1}{3}}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t+\frac{1}{3}} \right| = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}} \right| + c \end{aligned}$$

□

**Pr.:**

$$\begin{aligned} \int \frac{x-4}{x^2 \sqrt{2x^2-2x+1}} dx &= \left| x = \frac{1}{t}; dx = -\frac{1}{t^2} dt \right| = \int \frac{\left(\frac{1}{t}-4\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{\frac{1}{t^2} \sqrt{2\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+1}} dt = -\int \frac{\frac{1-4t}{t^3}}{\sqrt{2-2t+t^2}} dt = \\ &= \int \frac{4t-1}{\sqrt{t^2-2t+2}} dt = 2 \int \frac{2t-2}{\sqrt{t^2-2t+2}} dt + 3 \int \frac{dt}{\sqrt{(t-1)^2+1}} = \left| t^2-2t+2 = z^2; (2t-2)dt = 2zdz \right| = \\ &= 2.2 \int \frac{zdz}{z} + 3 \ln |t-1+\sqrt{t^2-2t+2}| = 4\sqrt{t^2-2t+2} + 3 \ln |t-1+\sqrt{t^2-2t+2}| = \\ &= 4\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+2} + 3 \ln \left| \frac{1}{x}-1+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+2} \right| + c \end{aligned}$$

□